Divulgaciones Matemáticas 2(1) (1994), 5–9

Extremos en Sucesiones

Extrema in Sequences

José Heber Nieto
Departamento de Matemática y Computación
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia. Apartado Postal 526
Maracaibo 4001. Venezuela
(`jhnieto@luz.ve`)

Resumen

En este trabajo se calcula el número de permutaciones de un conjunto linealmente ordenado finito, que presentan máximos de izquierda a derecha en posiciones determinadas. Se relacionan estos números con los números de Stirling de primera clase y se exhibe una aplicación al análisis de algoritmos.
Palabras y frases clave: Permutaciones, máximos, números de Stirling.

Abstract

In this paper we compute the number of permutations of a finite linearly ordered set which have left to right maxima at determined positions. These numbers are related to Stirling numbers of the first kind and an application to the analysis of algorithms is exhibited.
Key words and phrases: Permutations, maxima, Stirling numbers.

1 Introducción

Sea A un conjunto linealmente ordenado (c.l.o. en lo sucesivo) y $a_0, a_1, \ldots$ una sucesión (finita o infinita) de elementos de A. Diremos que a_i es un *máximo de izquierda a derecha (maxi)*, o también que *la sucesión presenta un* *maxi en la posición* i, si a_i es mayor que cualquier elemento precedente (en otras palabras si $0 \leq j < i \Rightarrow a_j < a_i$). Observemos que a_0 es siempre un maxi. Análogamente se definen los *mínimos de izquierda a derecha* o *minis*.

Este tipo de extremos aparece naturalmente en conexión con varios algoritmos básicos, de los cuales el más sencillo es el siguiente, que halla el máximo elemento almacenado en un arreglo `a[0],...,a[n-1]` de elementos de un c.l.o.:

Algoritmo 1

```
m:=a[0];
para i:=1 hasta n-1 haga
   si m<a[i] entonces m:=a[i];
```

Es claro que los valores que se asignan sucesivamente a la variable `m` son precisamente los maxis de la sucesión `a[0],...,a[n-1]`, y el último de ellos, que es el máximo elemento del arreglo, es el valor final de `m`.

2 Notación

Denotaremos $\mathbb{N}_n$ al conjunto de enteros no negativos menores que n, es decir $\mathbb{N}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\} = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i < n\}$. Si A es un c.l.o. con n elementos y $M \subset \mathbb{N}_n$, llamaremos $g(M, n)$ al número de permutaciones de A que presentan maxis exactamente en las posiciones señaladas por M (es claro que $g(M, n)$ sólo depende de M y n y no de A, ya que todos los c.l.o.'s de n elementos son isomorfos).

Al número de permutaciones de A que presentan exactamente k maxis lo designaremos $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Obviamente

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\substack{M \subset \mathbb{N}_n \\ |M| = k}} g(M, n)$$

Al producto de todos los elementos de un conjunto finito de enteros M lo denotaremos $\prod M$. Por convención $\prod \varnothing = 1$ y $\prod\{k\} = k$.

3 Resultados básicos

En esta sección nos proponemos calcular los números $g(M, n)$ y $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Comenzaremos con dos lemas sencillos.

Lema 1. *Si* $n \in M \subset \mathbb{N}_{n+1}$ *entonces* $g(M, n+1) = g(M \setminus \{n\}, n)$.

Demostración. sea A un c.l.o. con $n+1$ elementos y sea m el mayor de ellos. Es claro que una permutación $a_0, \ldots, a_n$ de A presenta un maxi en la posición n si y sólo si $a_n = m$. por lo tanto el número de estas permutaciones con maxis en M es igual al de las permutaciones de $A \setminus \{m\}$ con maxis en $M \setminus \{n\}$. □

Lema 2. *Si* $M \subset \mathbb{N}_n$ *entonces* $g(M, n+1) = n \cdot g(M, n)$.

Demostración. Sea A un c.l.o. con $n+1$ elementos y m el mayor de ellos. Las permutaciones de A con maxis en M pueden obtenerse así: escojamos un elemento cualquiera x en $A \setminus \{m\}$. Tomemos una permutación $a_0, \ldots, a_{n-1}$ de $A \setminus \{x\}$ con maxis en M y agreguémosle al final $a_n = x$. Así resulta una permutación de A con maxis en M y obviamente todas pueden obtenerse así. Como x puede escogerse de n maneras y para cada una de ellas la permutación de los elementos restantes puede seleccionarse de $g(M, n)$ modos, la aplicación del principio del producto concluye la demostración. □

Teorema 1. $g(M, n) = \prod(\mathbb{N}_n \setminus M)$.

Demostración. Procederemos por inducción en n. Para $n = 1$ el resultado es inmediato pues $g(\{0\}, 1) = 1 = \prod \varnothing$ y $g(\varnothing, 1) = 0 = \prod\{0\}$. Supongamos el teorema cierto para n: sea A un c.l.o. con $n+1$ elementos y $M \subset \mathbb{N}_{n+1}$. Distinguiremos dos casos:
a) $n \in M$. En este caso $g(M, n+1) = g(M \setminus \{n\}, n)$ por el Lema 1, y por la hipótesis inductiva esto es $\prod(\mathbb{N}_n \setminus (M \setminus \{n\})) = \prod(\mathbb{N}_{n+1} \setminus M)$.
b) $n \notin M$. En este caso por el Lema 2 se tiene $g(M, n+1) = n \cdot g(M, n)$ y por la hipótesis inductiva $g(M, n) = \prod(\mathbb{N}_n \setminus M)$. Por lo tanto $g(M, n+1) = n \cdot \prod(\mathbb{N}_n \setminus M) = \prod(\mathbb{N}_{n+1} \setminus M)$. □

Ejemplo

Para $n = 4$ y $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se tiene lo siguiente:

Conjunto M	Permutaciones de A con maxis en M						$g(M,4)$
$\{0\}$	4123	4132	4213	4231	4312	4321	$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$
$\{0,1\}$	1423	1432	2413	2431	3412	3421	$6 = 2 \cdot 3$
$\{0,2\}$	2143	3142	3241				$3 = 1 \cdot 3$
$\{0,3\}$	3124	3214					$2 = 1 \cdot 2$
$\{0,1,2\}$	1243	1342	2341				$3 = \prod\{3\}$
$\{0,1,3\}$	1324	2314					$2 = \prod\{2\}$
$\{0,2,3\}$	2134						$1 = \prod\{1\}$
$\{0,1,2,3\}$	1234						$1 = \prod \varnothing$

Teorema 2. $\left[{n \atop k}\right]$ *es igual a la suma de todos los productos de $n-k$ factores enteros distintos comprendidos entre 1 y $n-1$. Equivalentemente:*

$$x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k.$$

Demostración. Como $\left[{n \atop k}\right] = \sum\{g(M,n) : M \subset \mathbb{N}_n,\ |M| = k\}$ este teorema es consecuencia inmediata del anterior, ya que cada $g(M,n)$ no nulo es el producto de los $n-k$ enteros en $\mathbb{N}_n \setminus M$, los cuales están comprendidos entre 1 y $n-1$, y al variar M se obtienen todos estos productos.

Estos mismos productos aparecen como coeficientes de las potencias de x al desarrollar el producto $x(x+1)\cdots(x+n-1)$. $\square$

La identidad planteada en el teorema anterior se toma generalmente como *definición* de los números $\left[{n \atop k}\right]$, los cuales son conocidos en la literatura como "números de Stirling de primera clase" (ver [1]).

4 Aplicación

Sea A un c.l.o. con n elementos y supongamos que se ejecuta el Algoritmo 1 con una permutación al azar de A en el arreglo `a[0],...,a[n-1]`. Sea X el número de asignaciones a la variable `m`. Suponiendo que las $n!$ permutaciones de A son equiprobables, calcularemos el valor esperado $\mathbf{E}(X)$ de la variable aleatoria X. Para esto observemos que la probabilidad de que una permutación de A presente k maxis es $P_{n,k} = \left[{n \atop k}\right]/n!$, por lo tanto la función generatriz correspondiente es

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k} x^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = \frac{1}{n!} x(x+1)\cdots(x+n-1).$$

Por lo tanto

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = [\ln G(x)]' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1}$$

y

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = H_n = \gamma + \ln n + o(n)$$

siendo $\gamma = 0.577\ldots$ la constante de Euler y $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

De manera similar se puede calcular la varianza de X,

$$\mathbf{Var}(X) = G'(1) + G''(1) - G'(1)^2 = H_n - H_n^{(2)} = \gamma - \frac{\pi^2}{6} + \ln n + o(n)$$

siendo $H_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$. Para más detalles ver [1] o [2].

Referencias

[1] Knuth, D.E. *Algoritmos Fundamentales*, Reverté, Barcelona, 1980.

[2] Nieto, J.H. *Teoría Combinatoria* (Notas de Matemática y Computación No. 4), F.E.C., Universidad del Zulia, Maracaibo, 1987.